Clase 11: Separación de variables y series de Fourier.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

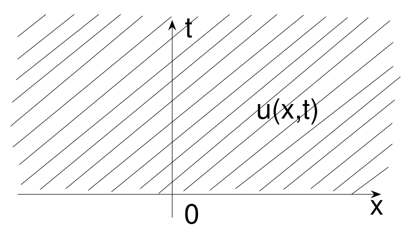
1. Introducción.

En esta clase iniciaremos el estudio de ED a derivadas parciales (EDDP), donde la función incógnita u depende de más de una variable y por lo tanto las derivadas que aparecen en la ED son derivadas parciales con respecto a las variables independientes (en aplicaciones a la física e ingeniería frecuentemente variables especiales y el tiempo t). La ED generalmente viene acompañada por condiciones adicionales como condiciones de borde y condiciones iniciales.

Como introducción consideremos ahora una EDDP en una sola variable espacial x y el tiempo t,

$$u_t - u_x - u = 0; \quad -\infty < x < \infty, \ t \geq 0, \tag{1}$$

donde $u = u(x,t)$. La ED está planteada en la región sombreada del plano x, t en la figura siguiente:



Para encontrar soluciones particulares de (1) aplicamos la técnica de la separación de variables, es decir, buscamos soluciones $u(x,t)$ de (1) de la forma especial $u(x,t) = X(x)T(t)$, de tipo " variables separadas". Escribimos

$$X'(x) = \frac{dX}{dx}, \quad T'(t) = \frac{dT}{dt}.$$

Sustitución de $u = XT$ en (1) da

$$X(x)T'(t) - X'(x)T(t) - X(x)T(t) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{X'(x)}{X(x)} - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{X'(x)}{X(x)} + 1 = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

En la última ecuación el miembro izquierdo depende únicamente de x y el miembro derecho depende únicamente de t, y por lo tanto ambos miembros tienen que ser igual a una misma constante λ, es decir,

$$\frac{X'(x)}{X(x)} + 1 = \lambda, \ \ \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda; \ \ -\infty < x < \infty \ t \geq 0,$$

produciendo un sistema de dos ED ordinarias

$$X'(x) = (\lambda - 1)X(x), \quad T'(t) = \lambda T(t),$$

con soluciones generales

$$X(x) = Ae^{(\lambda-1)x}, \quad T(t) = Be^{\lambda t},$$

de modo que (con $C = AB$)

$$u(x,t) = Ce^{\lambda t}e^{(\lambda-1)x}; \ \ -\infty < x < \infty, \ t \geq 0. \tag{2}$$

De (2) tenemos $u_t - u_x - u = \lambda u - (\lambda - 1)u - u = 0$, de modo que $u(x,t)$ dada por (2) realmente es solución de (1). Tenemos entonces un conjunto infinito de soluciones que depende de dos parámetros λ, C. Si embargo estas " ∞^2 soluciones" ni remotamente cubren todas las soluciones posibles. De hecho, para $f(\xi)$ diferenciable en $-\infty < x < \infty$ arbitraria,

$$v(x,t) = e^t f(x+t); \ \ -\infty < x < \infty, t \geq 0 \tag{3}$$

es una solución de (1) (¡verifique!). Variando en (3) la función $f(\xi)$ obtenemos una inmensa cantidad de soluciones adicionales, y todavía no tenemos todas las soluciones.

Las consideraciones anteriores sirven para ilustrar que las ED a derivadas parciales tienen en general demasiadas soluciones para poder esperar captarlas todas en una sola fórmula, como es posible para ED ordinarias frecuentemente. El método de separación de variables ilustrado arriba es un método relativamente eficiente para encontrar una familia de soluciones tipo variable separadas. Como veremos, estas soluciones en muchos casos sirven de base para construir otras soluciones de suficiente generalidad para proporcionar las soluciones requeridas para un problema planteado dado.

Como ilustración consideremos ahora un problema de la conducción de calor en una barra delgada (es decir "undimensional") que ocupa el intervalo $[0, l]$ del eje x. Sea $u = u(x, t)$ la temperatura en el lugar x de la barra y en el instante t . Supongamos que en el instante $t = 0$ se conoce la distribución de temperatura $u(x, 0) = f(x)$, $0 \leq x \leq l$ en la barra (distribución de temperatura inicial) y que desde el instante $t = 0$ y adelante se mantiene los extremos $x = 0$ y $x = l$ en la temperatura cero. Matemáticamente el problema de determinar la distribución de temperatura en la barra para $t > 0$, esta descrita por

$$u_t = k u_{xx}; \quad 0 \leq x \leq l, \ t > 0, \tag{4}$$

$$u(x, 0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq l \ \ \text{(condición inicial)}, \tag{5}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0; \quad t \geq 0 \ \ \text{(condiciones de borde)}. \tag{6}$$

La EDDP (4) (en donde $k > 0$ es una constante material de la barra) es la ecuación de la conducción del calor en su forma undimensional (la forma 3-dimensional es $u_t = k\triangle u$ donde $\triangle = \partial/\partial x^2 + \partial/\partial y^2 + \partial/\partial z^2$ es el operador de Laplace). Presentaremos a continuación el procedimiento formal para la resolución de nuestro problema.

Aplicando separación de variables $u(x, t) = X(x)T(t)$ en (4) resulta

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda \ \ \text{para cierta constante } \lambda, \tag{7}$$

(escribimos la constante como $-\lambda$ en lugar de λ para obtener las ecuaciones subsiguientes en la "forma acostumbrada"). La ecuación (4) tiene la solución trivial $u(x, t) = 0$ para todo x, t, la cual por supuesto no nos interesa: estamos buscando las soluciones no triviales y por lo tanto asumimos que $X(x)$ y $T(t)$ no son idénticamente cero. De (4), (6) tenemos

$$X(0)T(t) = 0, \ \ t > 0, \ \ T(t) \text{ no identicamente cero} \Longrightarrow X(0) = 0 \text{ y similarmente}$$

$$X(l)T(t) = 0, \ \ t > 0 \quad \Longrightarrow \quad X(l) = 0.$$

De esto y (7) obtenemos para $X(t)$ el problema

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad 0 \leq x \leq l \tag{8}$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{9}$$

Los valores de λ tales que el problema (8), (9) tiene soluciones $X(x)$ no triviales se llaman los autovalores del problema, y las soluciones no triviales correspondientes se llaman autofunciones correspondientes. El problema (8), (9) es un ejemplo de un problema de autovalores y autofunciones (PAA). Veremos más adelante que los autovalores λ del problema (8), (9) forman un conjunto discreto e infinito de valores:

$$\begin{gathered} \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}; \quad n = 1, 2, 3, \cdots \\ \text{con autofunciones correspondientes } X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\tfrac{n\pi}{l}x\right) \end{gathered} \tag{10}$$

donde observamos que $cX_n(x)$ ($c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria) también es autofunción correspondiente a $\lambda = \lambda_n$: observe que (8), (9) se cumple cuando en estas ecuaciones reemplazamos $X_n(x)$ por $cX_n(x)$ (consecuencia del hecho que tanto la ED (8) como las condiciones de borde (9) son homogéneas). En la ED para $T(t)$ contenida en (7) ponemos ahora $\lambda = \lambda_n$, obteniendo

$$T_n'(t) + k\lambda_n T_n(t) = 0,$$

con solución general (patrimonio cultural)

$$T_n(t) = A_n e^{-k\lambda_n t}, \quad A_n \ \text{ constante arbitraria.}$$

Tomando $A_n = 1$ tenemos las soluciones

$$T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}; \quad n = 1, 2, 3, \cdots . \tag{11}$$

Con las $X_n(t)$ y $T_n(t)$ tenemos ahora un conjunto infinito de funciones $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$, es decir

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-k\lambda_n t} \tag{12}$$

que satisfacen (4), (6).

Esto completa la primera parte del procedimiento: aplicando separación de variables llegamos al PAA (8), (9), obtuvimos los autovalores λ_n y autofunciones correspondientes $X_n(x)$, y con los λ_n obtuvimos los $T_n(t)$ y así finalmente las $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ que satisfacen (4) (6).

El proximo paso es observar que cualquier combinación lineal

$$\sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x) T_n(t) \ \text{ de } u_1(x,t), \cdots, u_N(x,t) \tag{13}$$

también satisface (4), (6), como consecuencia del hecho de que la ED (4) y las condiciones de borde (CB) (6) son homogéneas (recomendamos al alumno la verificación de esta afirmación). Surge entonces la idea de obtener la solución del problema completo (4), (6) y (5) como una combinación lineal como en (13). Veremos más adelante que en general será necesario tomar todo el conjunto infinito $u_1(x,t), u_2(x,t), \cdots$ $(N \to \infty)$ en cuenta para formar la combinación lineal, obteniendose $u(x)$ en la forma de una serie infinita de funciones:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-k\lambda_n t}; \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \tag{14}$$

Para cumplir con (5), $u(x,0) = f(x)$, vemos de (14) que es necesario que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad 0 \leq x \leq l \tag{15}$$

(bastaría que la serie infinita converja a $f(x)$ $c.s.$ en $[0,l]$). La pregunta es entonces: ¿es posible determinar las constantes c_n de manera tal que se cumple (15)?. Veremos más adelante que la respuesta es afirmativa para una amplia clase de funciones $f(x)$. Decimos que (15) es el desarrollo de $f(x)$ en serie de Fourier de senos en $0 \leq x \leq l$.

Suponiendo que este desarrollo es posible, el último paso es la determinación de los coeficientes de Fourier c_n en (15). Para eso tenemos un procedimiento general que explicaremos ahora en términos generales. Es fácil verificar directamente (¡Ejercicio recomendado!) que las $X_n(x)$ forman un sistema ortogonal en $0 \leq x \leq l$ en el sentido que

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)dx = 0 \ \text{ si } m \neq n \tag{16}$$

(para la verificación es útil la fórmula $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$, y que además

$$\int_0^l [X_n(x)]^2 dx = \frac{l}{2} \ \text{ para } n = 1, 2, \cdots. \tag{17}$$

De (15) tenemos formalmente, para n fijo arbitrario,

$$\int_0^l f(x)X_n(x)dx = \int_0^l X_n(x)\sum_{n=1}^{\infty} c_m X_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_m \int_0^l X_n(x)X_m(x)dx \overset{(16)}{=} c_n \int_0^l [X_n(x)]^2 dx$$

(gracias a las relaciones de ortogonalidad (16) queda un solo término en la serie infinita)

$$\Longrightarrow \quad c_n = \frac{\int\limits_0^l f(x)X_n(x)dx}{\int\limits_0^l [X_n(x)]^2dx}; \quad n = 1, 2, \cdots . \tag{18}$$

para el desarrollo en serie de Fourier $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} c_n X_n(x); \quad 0 \leq x \leq l$, donde $\{X_n(x)\}$ es un sistema ortogonal en $[0, l]$. Aplicando (17) en (18) resulta para los $X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ que

$$c_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx; \quad n = 1, 2, \cdots . \tag{19}$$

Luego de calcular los c_n de (19), sustitución de los c_n encontradas en (14) nos da la solución final del problema (4)-(6). Recordemos que el cómputo de las integrales (19) lo hacemos aplicando derivadas generalizadas.